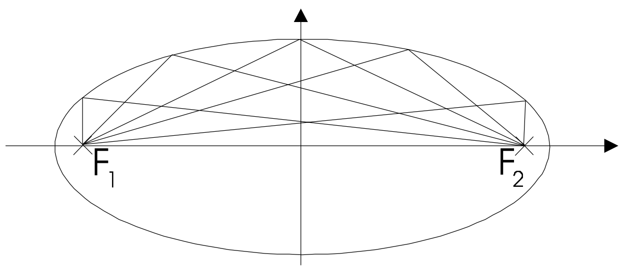
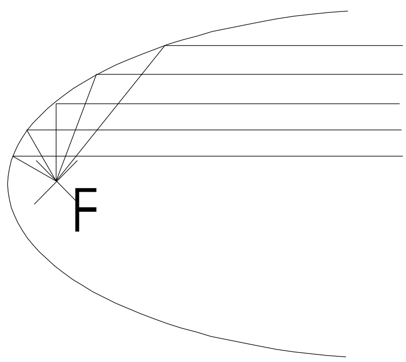
Ziel:
Ein Ellipsoid hat die Eigenschaft, dass Strahlen von einem Punkt F_1 (dem Brennpunkt) am Ellipsoid (Tangentialebene) gespiegelt sich in einem Punkt F_2 (dem 2.Brennpunkt) schneiden.

Zu klären:
- R^3 in R^2 übertragen
- Ellipse als gestauchten Kreis einführen
- Erarbeiten der Eigenschaft, dass es zwei Punkte F_1 und F_2 gibt, so dass für alle Punkte auf der Ellipse die Summe der Abstände zu diesen Punkten konstant ist
- Tangenten- und Normalenkonstruktion an Ellipse
- Brennpunkteigenschaft : siehe Ziel



Ziel:
Ein Paraboloid hat die Eigenschaft, dass es einen Brennpunkt F gibt, so dass alle „Parallelstrahlen zu Brennstrahlen werden

Zu klären:
- $y^2 = ax$ betrachten als „Umkehrfunktion von $y = x^2$
- Erarbeiten der Eigenschaft, dass es einen Punkt F und eine Gerade g gibt, so dass alle Punkte der Parabel von F und g den gleichen Abstand haben, a=2p und p ist der Abstand von F zu g
- Tangentenkonstruktion an Parabel
- Brennpunkteigenschaft (Ziel)



Zur Ellipse:

1. Kreis um (0;0) mit Radius a : $\{(x;y) / x^2 + y^2 = a^2 \}$

Funktion Halbkreis $HK: \begin{cases} [-a;a] \to [0;a] \\ x \quad \alpha \quad \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$

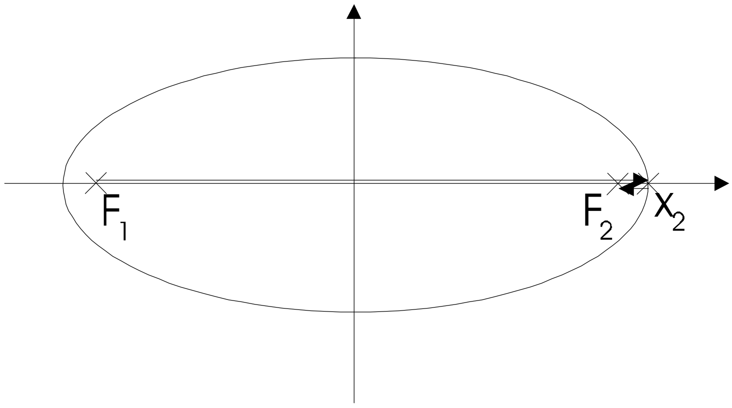
2. Kreis in y-Richtung stauchen $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ führt graphisch auf

Ellipse und rechnerisch auf $\left\{ (x;y) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ (*)

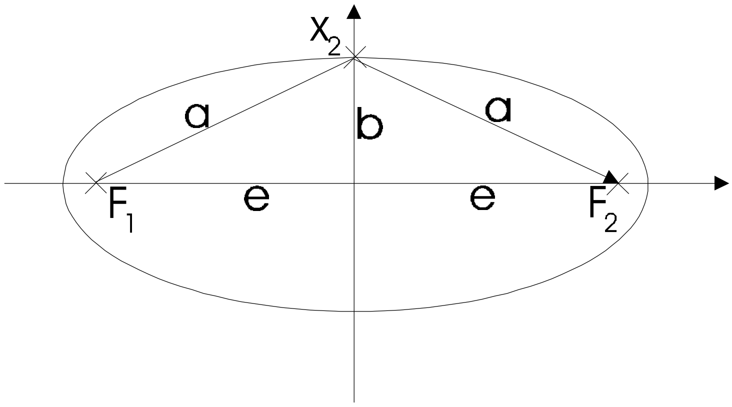
3. Beh.: Es gibt 2 Punkte F_1 und F_2 auf der Hauptachse mit:
$l(F_1X) + l(F_2X) = c$ für alle X auf der Ellipse

wenn dies stimmt, dann führt
spezielle Lage von X zunächst auf $F_1=(e;0)$ und $F_2=(-e:0)$
mit $e^2=a^2-b^2$:

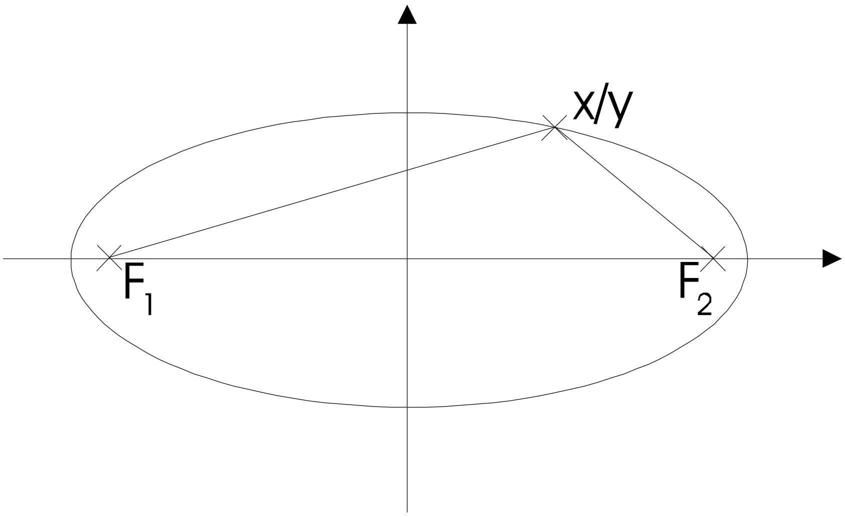
$x = x_1 : l(F_1X_1)+l(F_2X_1) = 2a$



$x =x_2 : e^2=a^2-b^2$



4. X beliebig auf Ellipse führt dann auf die Ellipsengleichung

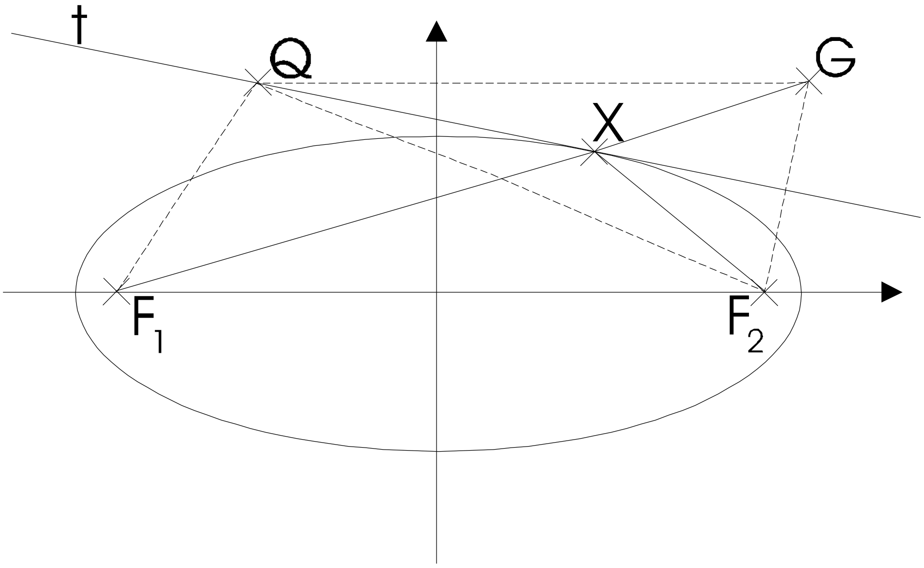


l(F_2X)+l(F_1X) = $\sqrt{y^2+(x-e)^2}+\sqrt{y^2+(x+e)^2}=2a$ führt auf

Ellipsengleichung $\left\{(x;y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ (*).

5. Spezielle Tangentenkonstruktion an X :

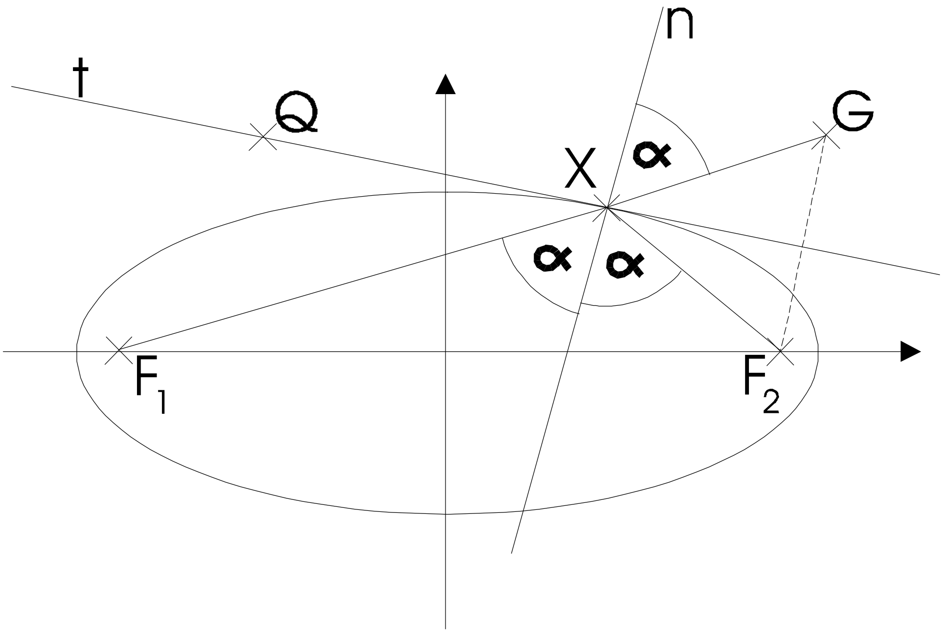
Verlängere F_1X um F_2X, erhalte G, Mittelsenkrechte t auf F_2G ist Tangente durch X an Ellipse



Beweis: alle $Q \neq X$ und $Q \in t$ liegen nicht auf der Ellipse:

$l(F_2Q) = l(GQ)$: t ist Mittelsenkrechte

$l(F_1Q) + l(F_2Q) = l(F_1Q) + l(GQ) > l(F_1G) = 2a$.



Damit halbiert t den Winkel F_2XG und die Normale halbiert den Winkel F_2XF_1.

Dies war unsere Zielperspektive.

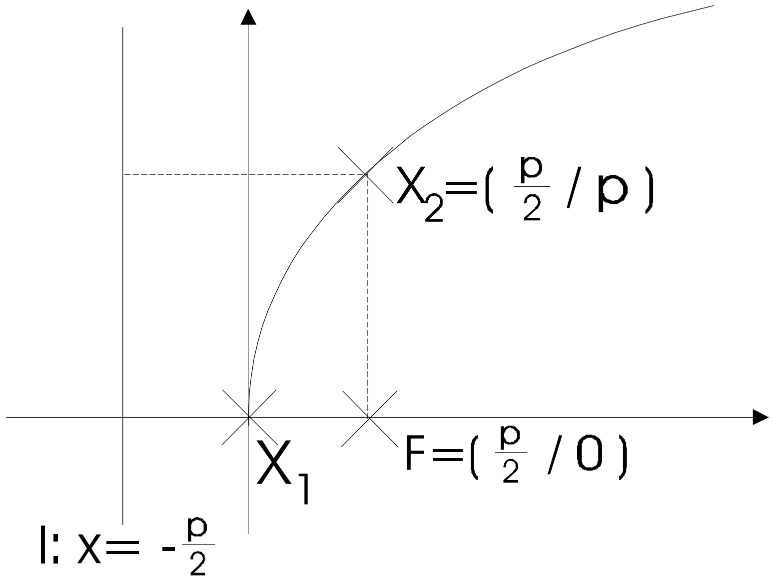
Zur Parabel

1. Betrachte $\{(x;y) \,/\, y^2 = ax \text{ mit } a,x,y \in R_+\}$ (+)

   Dazu u.a. wiederholen $f = \begin{cases} \Re_+ \to \Re_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ *und* $f^{-1} = \begin{cases} \Re_+ \to \Re_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

2. Beh.: die Menge aller Punkte, die von einem Punkt F und einer Geraden l den gleichen Abstand haben, läßt sich durch (+) beschreiben.

   Wähle X_1 als Koordinatenursprung in der Mitte zwischen F und l und bezeichne d(F;l) mit p : also F = $\left(\frac{p}{2};0\right)$ und l: $x = -\frac{p}{2}$. $X_2 = \left(\frac{p}{2};p\right)$ erfüllt Bedingung, mit $p^2 = a\frac{p}{2}$ folgt $a = 2p$ also $y^2 = 2px$



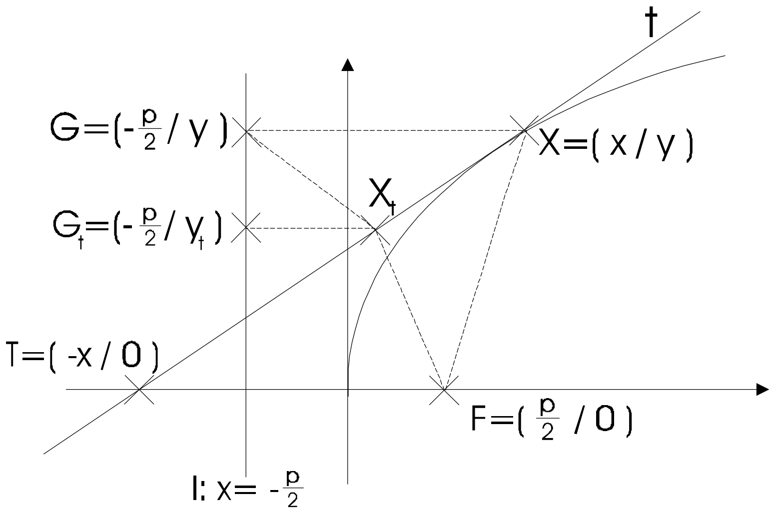
Für beliebige X= (x;y) aus dieser Punktmenge gelte nun d(FX) = d(lX) , also $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$

Daraus folgt $y^2 = 2px$.

F heißt Brennpunkt und l Leitgerade

3. Tangentenkonstruktion an die Parabel $y^2 = 2px$

   $X = (x;y)$ sei Parabelpunkt: $T := (-x;0)$, dann ist die Gerade t durch T und X Tangente.
   Beweis: $G = \left(-\frac{p}{2}; y\right)$ liegt auf Leitgerade l und Dreieck FXG ist gleichschenklig und t ist Mittelsenkrechte von GF. Dann gilt für alle $X_t=(x_t;y_t) \neq X$, dass sie nicht zur Parabel gehören:
   $d(X_t;F) = d(X_t;G) > d(X_1;G_1)$ für $G_t = \left(-\frac{p}{2}; y_t\right)$,
   also $d(X_t;F) > d(X_t;G)$



4. Brennpunkteigenschaft

   Nach Konstruktion von T gilt $d(G;X) = d(T;F)$, also folgt
   $d(T;F) = d(F;X)$, das Dreieck TFX ist also gleichschenklig,
   damit sind die Winkel FTX und FXT gleich groß, damit ist jeder „Parallelstrahl“ ein „Brennstrahl“